

U. Didáctica 2: Potencias y raíces.

RECUERDA:

- Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales:
$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$
- a^n se lee “a elevado a n”, donde **a** es la **base** de la potencia y **n** es el **exponente**.
- Para calcular una potencia se multiplica la base tantas veces como indica el exponente.
- Para cualquier valor de $a \neq 0$ se tiene que: $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- También se cumple: $1^n = 1$ y $0^n = 0$.
- Ten en cuenta que si la **base es negativa** y el **exponente es par** la potencia es **positiva**:
 $(-a)^{n^{\text{par}}} = (+)$. Ejemplo: $(-2)^2 = 4$
- Análogamente, si la **base es negativa** y el **exponente es impar**, la potencia es **negativa**:
 $(-a)^{n^{\text{impar}}} = (-)$. Ejemplo: $(-2)^3 = -8$

OPERACIONES CON POTENCIAS

Al operar con potencias tenemos que fijarnos cómo son las bases y los exponentes:

- Productos:**
 - a) Si tienen la **misma base** y **distintos exponentes**, se deja esa base y se suman los exponentes
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 - b) Si tienen **distinta base**, pero **el mismo exponente**, se multiplican las bases y se deja el mismo exponente: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- Cocientes:**
 - a) Si tienen la **misma base** y **distintos exponentes**, se deja esa base y se restan los exponentes
 $a^m : a^n = a^{m-n}$
 - b) Si tienen **distinta base**, pero **el mismo exponente**, se multiplican las bases y se deja el mismo exponente: $a^n : b^n = (a : b)^n$
- La **potencia** de un **producto** es igual al producto de las potencias de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- La **potencia** de un **cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.
 $(a : b)^n = a^n : b^n$
- Para **eleva**r una **potencia** a **otra potencia**, se deja la misma base y se **multiplican** los exponentes.
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1. Expresa como una sola potencia.

a) $3^2 \cdot 3^5$	b) $(3^4)^5$
c) $7^5 : 7^3$	d) $(m^2)^3$
e) $x^5 \cdot x^9$	f) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^8$
g) $p^{10} : p^6$	h) $[(m^3)^2]^5$

2. Reduce a una única potencia.

a) $8^3 \cdot 5^3$	b) $a^8 \cdot b^8$
c) $35^4 : 7^4$	d) $p^{10} : t^{10}$
e) $(-2)^4 \cdot 7^4$	f) $3^{10} \cdot (-2)^{10} \cdot (-5)^{10}$
g) $(-18)^5 : (-9)^5$	h) $(-4)^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-10)^5$

3. Expresa como una única potencia aplicando sus propiedades.

a) $\frac{2^3 \cdot 2^5 \cdot (3^4)^2}{6^4}$
b) $\frac{25 \cdot 625 \cdot 64}{125 \cdot 8}$
c) $\frac{a^2 b \cdot ab^3 \cdot a^4 b^2}{a^3 b^5}$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

Una potencia con exponente negativo se define como la inversa de la potencia con exponente positivo

$$\text{Si } a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos.

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \quad (-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = \frac{-1}{1000}; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$$

4. Escribe como una sola potencia.

a) $\left[2^9 : (2^3)^2\right] \cdot (-2)^{-4}$

b) $\left[x^{-8} \cdot (-x)^5 \right] : x^3$

c) $(-5^2)^4 : \left[5^{-3} \cdot (-5)^3 \right]$

d) $-m^4 \cdot \left[(m^{-3})^5 : (-m)^8 \right]$

e) $\frac{2^3 \cdot (-2)^5 \cdot (3^4)^2}{(-6)^{-4}}$

f) $\frac{(a^4)^2 : \left[(-a)^5 \cdot (-a)^8 \right]}{(-a)^3 : a^8}$

5. Resuelve las siguientes operaciones usando las propiedades de las potencias. Expresa el resultado como productos y cocientes de potencias de exponente positivo.

a) $\frac{36^{-4} \cdot 64^2}{81^{-3} \cdot 16^{-2}}$

b) $\frac{(3^7 \cdot 2^{-4})^2 \cdot (5^2 \cdot 2^3)^3}{(2^{-2})^5 \cdot 3^4 \cdot 5^{-3}}$

$$c) \frac{(m^4 p)^2 \cdot m^{-5} p^{-3}}{m p^{-2} \cdot (m^2 p^3)^{-3}}$$

6. Las amebas son seres unicelulares que se reproducen por mitosis: cada una de ellas se divide en dos amebas, llamadas células hijas. En un laboratorio han conseguido aislar una ameba en una probeta. Calcula cuántas amebas habrá en dicha probeta después de 20 días si el ritmo de reproducción es de una división por día.

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO ENTERO

- Calcular la raíz cuadrada es hacer la operación inversa de elevar al cuadrado

$$b^2 = a \Leftrightarrow \sqrt{a} = b$$
- La raíz cuadrada de un número entero positivo es el valor positivo o negativo que elevado al cuadrado es igual a dicho número.
- El radicando es siempre un número positivo o igual a cero, ya que todo número al cuadrado es positivo.
- La raíz cuadrada es **exacta**, siempre que el radicando sea un cuadrado perfecto.

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4 \qquad \sqrt{36} = 6$$
- La raíz **entera** de un número entero es el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número. El *resto* es la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz entera.

$$\sqrt{17} \approx 4 \qquad \text{Resto} = 17 - 4^2 = 1$$

7. Calcula de la raíz cuadrada de los siguientes números.

$\sqrt{75}$
$\sqrt{180}$
$\sqrt{412}$
$\sqrt{12500}$

8. De un número sabemos que no es un cuadrado perfecto y que su raíz entera es 8.
- ¿Cuáles son los números que satisfacen estas condiciones? ¿Cuántos son?
 - ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el resto?
9. Una fábrica de baldosas tiene un único modelo rectangular de 36 cm de largo por 25 cm de ancho. ¿Es posible fabricar otro modelo de baldosa cuadrada con la misma área que la anterior? En caso afirmativo, ¿cuánto debe medir el lado de la nueva baldosa?
10. Laura ha comprado como recuerdo de su viaje a Segovia un juego de postales cuadradas. Para colgarlas en su cuarto, forma un poster cuadrado con ellas, con seis postales en cada lado. Si aún le quedan cuatro por colocar, ¿cuántas postales tiene en total?

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número está escrito en notación científica si es de la forma $a \cdot 10^p$, donde $1 \leq a < 10$, y p es un número entero. El exponente p se llama orden de magnitud.

Ejemplos:

- La masa del sol es de $1,989 \cdot 10^{30}$ Kg
- La masa de un glóbulo rojo es de $2 \cdot 10^{-10}$ g

Paso de notación decimal a notación científica

- El valor de a se obtiene desplazando la coma decimal
- El valor de p es el número de posiciones que se desplaza la coma. Es positivo si el desplazamiento es a la izquierda y negativo si es a la derecha.

Ejemplos: $0,000\ 000\ 023\ 4 = 2,34 \cdot 10^{-8}$; $14\ 230\ 067,8 = 1,423\ 006\ 78 \cdot 10^7$

Paso de notación científica a notación decimal

- Se multiplica el número decimal por la potencia de 10 indicada

Ejemplos: $3,4 \cdot 10^{-4} = 0,000\ 34$; $2,15 \cdot 10^6 = 2\ 150\ 000$

11. Escribe los siguientes números en notación científica e indica su orden de magnitud.

Notación decimal	Notación científica	Orden de magnitud
a) 4 560 000		
b) 0,000 78		
c) 0,007 89		
d) 7 050 000 000		
e) 0,012 5		
f) 12 576 000		
g) 7 896 380		
h) 0,000 000 057 5		

12. Escribe en notación decimal los siguientes números.

Notación científica	Notación decimal
a) $2,18 \cdot 10^3$	
b) $1,456 \cdot 10^{-3}$	
c) $8,16 \cdot 10^5$	
d) $1,01 \cdot 10^4$	
e) $7,25 \cdot 10^6$	
f) $3,89 \cdot 10^{-7}$	

OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para multiplicar, dividir y calcular potencias en notación científica se opera con los números y las potencias de 10 por separado utilizando las propiedades de las potencias.

Ejemplos:

- $(6,5 \cdot 10^4) : (2,5 \cdot 10^{-2}) = (6,5 : 2,5) \cdot (10^4 : 10^{-2}) = 2,6 \cdot 10^{4 - (-2)} = 2,6 \cdot 10^6$
- $(2,4 \cdot 10^6) \cdot (1,5 \cdot 10^8) = (2,4 \cdot 1,5) \cdot (10^6 \cdot 10^8) = 3,6 \cdot 10^{6+8} = 3,6 \cdot 10^{14}$
- $(1,25 \cdot 10^4)^{-2} = 1,25^{-2} \cdot (10^4)^{-2} = 1/1,25^2 \cdot 10^{-8} = 0,64 \cdot 10^{-8} = 6,4 \cdot 10^{-9}$

13. Opera en notación científica.

a) $(7,4 \cdot 10^3) \cdot (4,9 \cdot 10^4)$
b) $(1,75 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,1 \cdot 10^7)$
c) $(5,27 \cdot 10^{-3}) : (6,2 \cdot 10^{-6})$

$$d) (3,5 \cdot 10^{-4}) : (7 \cdot 10^2)$$

$$e) (5 \cdot 10^4)^3$$

$$f) (7,5 \cdot 10^{-3})^2$$

14. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

$$a) \frac{(5,4 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,6 \cdot 10^4)}{(7,2 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^{-2})}$$

$$b) \frac{(1,8 \cdot 10^{-5}) \cdot (9,1 \cdot 10^3)}{1,2 \cdot 10^2}$$

15. La dosis de una vacuna para un bebé es de $0,05 \text{ cm}^3$ y cada una de estas vacunas contiene $2,5 \cdot 10^8$ bacterias por cada centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias hay en una dosis? Expresa el resultado en notación científica.